

## **Zuverlässigkeitsanalyse und zuverlässigkeitsbasierte Optimierung mit probabilistischen Methoden am Beispiel eines Magnetantriebes**

Reliability Analysis and Reliability-based Optimization with probabilistic Methods focused on a Magnet Drive

Dr.-Ing. **The-Quan Pham**, OptiY e.K., Aschaffenburg

Dr.-Ing. **Alfred Kamusella**, IFTE, TU Dresden

### **Kurzfassung**

Zuverlässigkeit und Qualität eines Produktes sind gekennzeichnet durch Streuungen, Unsicherheiten, Fertigungstoleranzen und Fehler. Probabilistische Methoden sind geeignete Werkzeuge, solche Probleme bereits in der Entwurfsphase zu analysieren und einer Lösung zuzuführen. Stand der Technik sind die Monte-Carlo-Simulation und das Antwortflächenverfahren. Diese stochastischen Methoden sind leider instabil und deshalb ungeeignet für eine zuverlässigkeitsbasierte Optimierung. Die neuen analytischen Moment-Verfahren sind dagegen sehr schnell, robust und deshalb dafür geeignet. Am Beispiel eines Magnetantriebes wird es anschaulich beschrieben. Mit dem Ziel eines möglichst schnellen Arbeitszyklus werden die Parameter des Antriebmodells optimiert und anschließend eine Zuverlässigkeitsanalyse durchgeführt, die eine Versagenswahrscheinlichkeit bei ca. 50% offenbart. Erst eine zuverlässigkeitsbasierte Optimierung führt zu den gewünschten optimalen Entwurfparametern, bei denen die Funktionssicherheit und Robustheit trotz der unvermeidbaren Streuungen gewährleistet werden.

### **Abstract**

Product reliability and quality are characterized by variability, uncertainty, tolerance and error. Probabilistic methods are suitable tool for solving this problem in the early design stage. Monte-Carlo and response surface methodology are state of the art, but they are very stochastic, instable and therefore not applicable for reliability-based optimization. In contrast, new analytical moment method is very fast, stable and very applicable. The application of the magnet drive is demonstrated. After a nominal optimization to get the shortest working cycle, a reliability analysis is performed. It shows a failure of 50%. Not until a reliability-based optimization yields the desired optimal design parameters satisfying all functional safety and robustness despite natural system variability and uncertainty.

## 1. Einführung

Die Eigenschaften technischer Systeme bleiben nicht konstant, sondern streuen in der Realität. Sie sind durch Mittelwerte und stochastische Wahrscheinlichkeits-Verteilungen gekennzeichnet. Ursachen sind Umwelteinflüsse, unsichere Materialeigenschaften, Fertigungsungenauigkeit, Prozessunsicherheit, Alterung, Verschleiß usw. Diese natürlichen Aspekte müssen bei der Auslegung technischer Systeme beachtet werden. Primär sind dies die Streuungen der Produktparameter. Parameter-Streuungen der Produktparameter führen infolge der internen Zusammenhänge zu Streuungen der Produkteigenschaften (Bild 1). Das kann zum funktionalen Versagen oder zum Verschlechterung der Produktqualität führen.

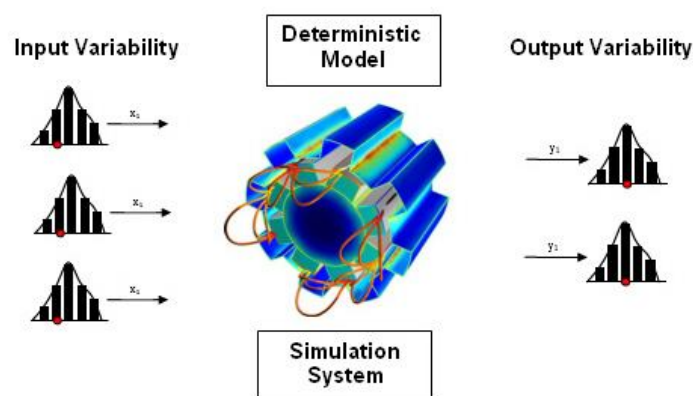


Bild 1: Natürliche Streuungen technischer Systeme

Diese Problematik ist in ihrer Komplexität in der Entwurfsphase sehr schwierig zu erfassen und tritt oft erst in der Serienfertigung und im Einsatz zu Tage. Probabilistische Methoden sind geeignete Werkzeuge, solche Probleme bereits in der Entwurfsphase zu analysieren und einer Lösung zuzuführen. Basiert auf dem deterministischen virtuellen Produktmodell werden dabei die statistischen Verteilungen der Ausgangsgrößen aus den Verteilungen der Eingangsgrößen berechnet, wobei die Ausgangsgrößen die Produkteigenschaften beschreiben. Anhand der Ausgangsgrößen kann man die Robustheit und Zuverlässigkeit des Systems bewerten. Eine große Herausforderung ist dabei die zu beherrschende lange Rechenzeit eines komplexen Produktmodells. Stand der Technik sind die Monte-Carlo-Simulation und das Antwortflächenverfahren. Diese stochastischen Methoden sind leider instabil und deshalb ungeeignet für eine zuverlässigkeitsbasierte Optimierung zum Finden eines robusten und zuverlässigen Entwurfs. Neuere analytische Moment-Verfahren sind dagegen sehr schnell, robust und deshalb dafür hervorragend geeignet. Die auch hier verfügbare globale varianzbasierte Sensitivitätsanalyse kann man zur Erklärung der Ursache-Wirkungs-Beziehungen und zur Reduzierung der Komplexität nutzen.

## 2. Probabilistische Methoden

Grundlage ist das deterministische Produktmodell, welches die Beziehungen zwischen Eingangsgrößen (Produktparameter) und Ausgangsgrößen (Produkteigenschaften) beschreibt. Probabilistische Methoden berechnen aus den stochastischen Verteilungen der Eingangsgrößen die Verteilungen der Ausgangsgrößen. Es existieren insgesamt 3 Klassen von Verfahren: Monte-Carlo-Simulation, Antwortflächenverfahren und Moment-Verfahren [1][5]. Außerdem gibt es weitere probabilistische Methoden wie FORM, SORM [9], die nur begrenzte Informationen wie Versagenswahrscheinlichkeiten liefern und auf die deshalb hier nicht weiter eingegangen wird.

### 2.1. Monte-Carlo-Simulation

Das ist eine stochastische Simulation, die die Verteilungen der Eingangsgrößen mit Hilfe von numerischer Zufallszahlengeneratoren generiert [6]. Für jede Kombination von Zufallszahlen wird eine Modellberechnung durchgeführt. Die Ergebnisse der Ausgangsgrößen werden abschließend statistisch ausgewertet. Der Vorteil der Monte-Carlo-Simulation liegt in der einfachen Implementierung und Anwendung. Der Nachteil ist es, dass das Verfahren sehr langsam konvergiert. Tausende Modellberechnungen sind erforderlich, um die Verteilungen der Ausgangsgrößen hinreichend genau zu ermitteln. Die Anzahl der Modellberechnungen steigt exponential zur Anzahl der Entwurfparameter. Das ist wegen der langen Rechenzeit eines komplexen Produktmodells nicht praktikabel.

### 2.1. Antwortflächen-Verfahren

Für jeden Punkt im Parameterraum gibt es infolge der eindeutigen Beziehungen zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen einen Punkt im Entwurfsraum. Um den ganzen Entwurfsraum zu untersuchen, sind sehr viele Abtastpunkte im Parameterraum erforderlich. Für rechenintensive Produktmodelle ist dies praktisch unmöglich. Hier hilft nur eine Approximation der Übertragungsfunktion mit Hilfe der Antwortflächenverfahren [7]. Dies ist bekannt als Ersatzmodell oder Metamodell, welches die wahre Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen durch eine mathematische Funktion  $y(x)$  ersetzt. Es gibt verschiedene Antwortflächenverfahren, die sich nur durch die Ansätze zur Beschreibung der mathematischen Ersatzfunktion unterscheiden: Polynome, Kriging, Gauss Prozess, Radial Basis Funktion, Neuronale Netze usw. Für den Polynom-Ansatz 2. Ordnung z.B. lautet die Ersatzfunktion  $y(x)$ :

$$y = \beta_0 y_0 + \sum \beta_{1i} x_i + \sum \beta_{2i} x_i^2 + \sum \beta_{ij} x_i x_j$$

Dabei sind die Koeffizienten  $\beta$  die zu ermittelnden Unbekannten des Metamodells. Dafür werden Stützstellen mit dem echten rechenintensiven Modell durch die statistische Versuchsplanung berechnet. Für jeden Stützpunkt wird eine Modellberechnung durchgeführt. Für den Polynomansatz 2. Ordnung sind dafür  $(n^2-n)/2+2n+1$  Stützstellen erforderlich, wobei  $n$  die Anzahl der Entwurfparameter ist. Für z.B. 4 Parameter benötigt man also nur 15 Modellberechnungen. Das ist viel schneller als tausende Modellberechnungen mit der Monte-Carlo-Simulation. Die unbekannt Koeffizienten des Metamodells werden mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt. Zur Berechnung der statistischen Verteilungen von Ausgangsgrößen wird eine Monte-Carlo-Simulation mit einer virtuellen Stichprobe durchgeführt, die nur auf dem Metamodell basiert. Die Rechenzeit hier ist im Vergleich zur Rechenzeit einer echten Modellberechnung vernachlässigbar. So sind virtuelle Stichprobengrößen im Bereich von einhunderttausend problemlos realisierbar.

Die Vorteile der Antwortflächenverfahren sind eine sehr schnelle Rechenzeit und eine hohe Genauigkeit durch die höhere Ordnung des Metamodells. Der Nachteil liegt jedoch in der Anwendung von Zufallszahlen zur Berechnung der Verteilungen der Ausgangsgrößen. Trotz großer virtueller Stichproben sind die Ergebnisse dadurch stochastisch. Die Antwortflächenverfahren sind deshalb auch nur bedingt geeignet für eine zuverlässigkeitsbasierte Optimierung.

### 2.3. Moment-Verfahren

Das Prinzip der Moment-Verfahren basiert auch auf einem Metamodell zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen. Es beschränkt sich dabei nur auf den Polynomansatz 1. und 2. Ordnung. Die unbekannt Koeffizienten des Metamodells werden mittels partieller Ableitungen auf Basis des echten Modells berechnet. Die Anzahl der Stützstellen für den Polynomansatz 2. Ordnung beträgt  $2n^2+1$ , wobei  $n$  die Anzahl der Entwurfparameter ist. Der entscheidende Unterschied zu den Antwortflächenverfahren liegt in der Berechnung der statistischen Verteilungen der Ausgangsgrößen. Nach der Ermittlung des Metamodells werden hier die statistischen Zentralmomente  $\mu$  (Mittelwert, Varianz, Schiefe und Überhöhung) der Ausgangsgrößen aus den vorgegebenen Momenten der Eingangsgrößen auf der Basis der Ersatzfunktionen  $y(x)$  berechnet.

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^k y(x) dx$$

Abschließend werden die Verteilungen der Ausgangsgröße mittels einer allgemeinen Lambda-Verteilung durch den Vergleich mit einer bekannten Momententabelle approximiert. Die Berechnung erfolgt also vollkommen analytisch und deterministisch ohne Zufallszahlen. Die

Moment-Verfahren sind deshalb extrem schnell und robust. Sie sind hervorragend geeignet für eine zuverlässigkeitsbasierte Optimierung.

### 3. Zuverlässigkeitsanalyse

Die Zuverlässigkeitsanalyse untersucht die Grenzüberschreitungen der Produkteigenschaften infolge der unvermeidbaren Streuungen. Für eine Produkteigenschaft repräsentiert durch eine Ausgangsgröße  $y(x)$  des Produktmodells muss man zulässige untere und obere Grenzen  $[y_u, y_o]$  definieren. Wenn die Produkteigenschaft  $y$  innerhalb der zulässigen Grenzen liegt:

$$y_u \leq y \leq y_o$$

soll das Produkt zuverlässig funktionieren. Andernfalls wird es funktionell versagen. Diese Definition ist problemspezifisch und muss für konkrete Aufgabenstellungen aus Lasten- und Pflichtenheft, Messungen, Vorserien, Erfahrungen usw. abgeleitet werden.

Da die statistischen Verteilungen der Produkteigenschaften  $y(x)$  nach der probabilistischen Simulation bekannt sind, kann man die Versagenswahrscheinlichkeiten  $\Phi$  für die einzelnen Produkteigenschaften durch eine numerische Integration aus der zugehörigen Dichtefunktion  $g(x)$  ermitteln:

$$\Phi = 1 - \int_{y_u}^{y_o} g(x) dx$$

Obwohl die Nennwerte der Produktparameter zuverlässige Werte der Produkteigenschaften liefern, können die Streuungen zu unzulässigen Werten und damit zum Versagen führen.

### 4. Globale varianzbasierte Sensitivitätsanalyse

Mit der Sensitivitätsanalyse kann man folgende Fragen zur Reduzierung der Entwurfskomplexität und zur Erklärung von Ursache-Wirkungs-Beziehungen beantworten:

- Welcher Modellparameter hat den größten Einfluss auf das Produktverhalten und muss beim Entwurf besonders berücksichtigt werden?
- Welche Parameter haben kaum Einfluss und können vernachlässigt werden?
- Welche Interaktionen zwischen den einzelnen Parametern treten dabei auf?

Lokale Sensitivitäten, wie partielle Ableitungen und Korrelationskoeffizienten, haben nur geringe Aussagekraft, weil die Produkteigenschaften nur linearisiert durch Abtastung an den Grenzen betrachtet werden. Die Eigenschaften streuen jedoch im gesamten Entwurfsraum und können nichtlinear sein. Die globalen varianzbasierten Sensitivitäten wie Sobol Index [8] betrachten dagegen den Parametereinfluss im gesamten Entwurfsraum und

berücksichtigen auch Nichtlinearitäten. Der Haupteffekt ist der Quotient aus der durch einen einzelnen Parameter verursachten Varianz zu der durch alle Parameter verursachten Varianz der Ausgangsgröße:

$$S_H = \text{Var}(y|x_i) / \text{Var}(y|X)$$

Der Totaleffekt summiert sich aus dem Haupteffekt und der Interaktionen zwischen den einzelnen Parametern:

$$S_T = \text{Var}(y|x_i) / \text{Var}(y|X) + \text{Var}(y|x_i, x_j) / \text{Var}(y|X)$$

Die Berechnung der Varianzen basieren auf dem Metamodell. Die globale Sensitivitätsanalyse ist deshalb nur bei Antwortflächen- und Moment-Verfahren verfügbar [1].

## 5. Probabilistisches Design eines Magnetantriebes

Beim Entwurf von schnellen Elektromagnet-Miniaturantrieben wird der Konstrukteur mit fast allen Formen von Streuungen und Unsicherheiten konfrontiert, z.B.:

- Fertigungstoleranzen (insbesondere für Federn und Maße von Luftspalten)
- Ungenaue magnetische Kennwerte für den Eisenkreis
- Unzureichende Modellierung von Wirbelstrom und magnetischer Hysterese
- Schwankende Spulentemperatur, Betriebsspannung und Krafterwirkung

Am Beispiel eines Magnetantriebes für eine Präge-Nadel sollen deshalb Ansätze für die Lösung solcher Entwurfsprobleme mittels probabilistischer Simulation gezeigt werden.

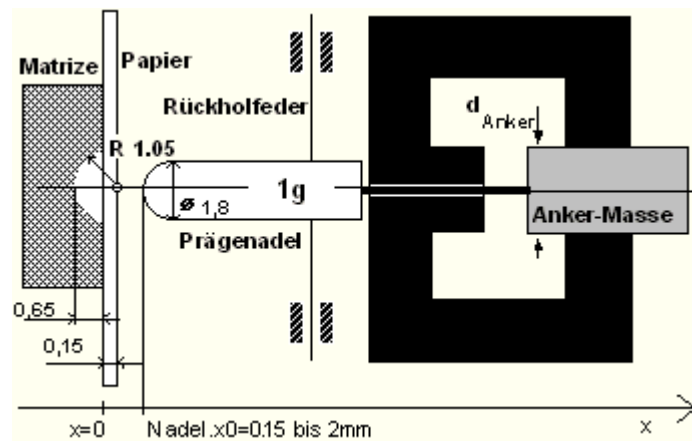


Bild 2: Prinzipskizze für den Blindenschrift-Nadelantrieb

Mit einer Präge-Nadel soll möglichst schnell Blindenschrift in Papier geprägt werden. Für ein Funktionsmuster wird eine optimale Lösung gesucht, die trotz aller Streuungen stabil funktioniert. Die dynamische Simulation erfolgt mit einem Netzwerk-Modell im Programmsystem SimulationX der Firma ITI GmbH aus Dresden.

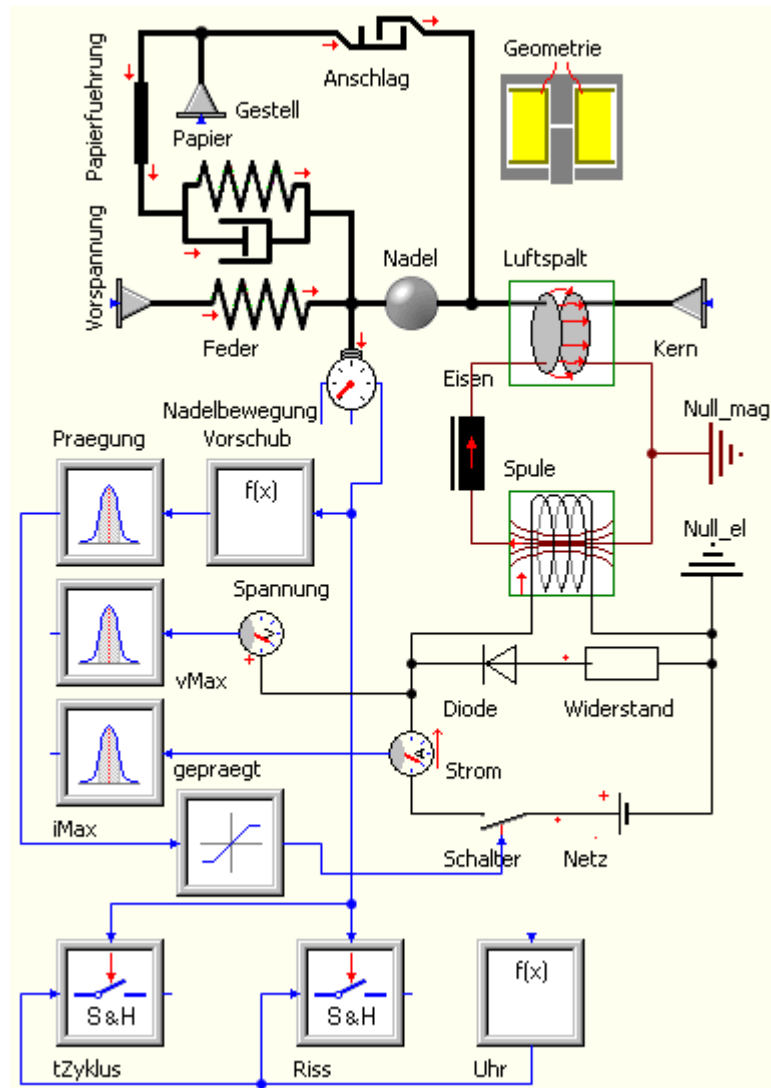


Bild 3: Struktur des SimulationX-Modells

Das Modell berücksichtigt die Antriebsmechanik, den Wandler, die elektrische Ansteuerung, die Spulenerwärmung sowie die Magnet-Geometrie einschließlich der Spulenparameter. Aus den simulierten Signalverläufen erfolgt im Modell die Berechnung der für die Bewertung des Antriebsverhaltens erforderlichen Ausgangsgrößen (Bewertungsgrößen), z.B.:

- tZyklus (Zykluszeit für die Bewegung der Präge-Nadel)
- Praegung (Maß für die erfolgreiche Präegung des Papiers)
- iMax (Maximalstrom durch die Spule)
- vMax (Maximalspannung an der Spule)
- dT\_Draht (Erwärmung der Spule)

Die Nennwert-Optimierung konnte unter Berücksichtigung konstruktiver Abhängigkeiten mit nur fünf Entwurfparametern vorgenommen werden:

- d\_Anker (Ankerdurchmesser)
- R20\_Spule (Widerstand der Spule bei 20°C)
- w\_Spule (Windungszahl der Spule)
- k\_Feder (Elastizitätskonstante der Rückholfeder)
- R\_Abschalt (Abschaltwiderstand als Überspannungsschutz)

Die Nennwert-Optimierung reizt zulässige Grenzwerte der Restriktionsgrößen meist aus, um ein "Maximum" an Funktionalität zu erreichen. Damit liegt ein Nennwert-Optimum praktisch immer an der Grenze zum unzulässigen Verhalten:

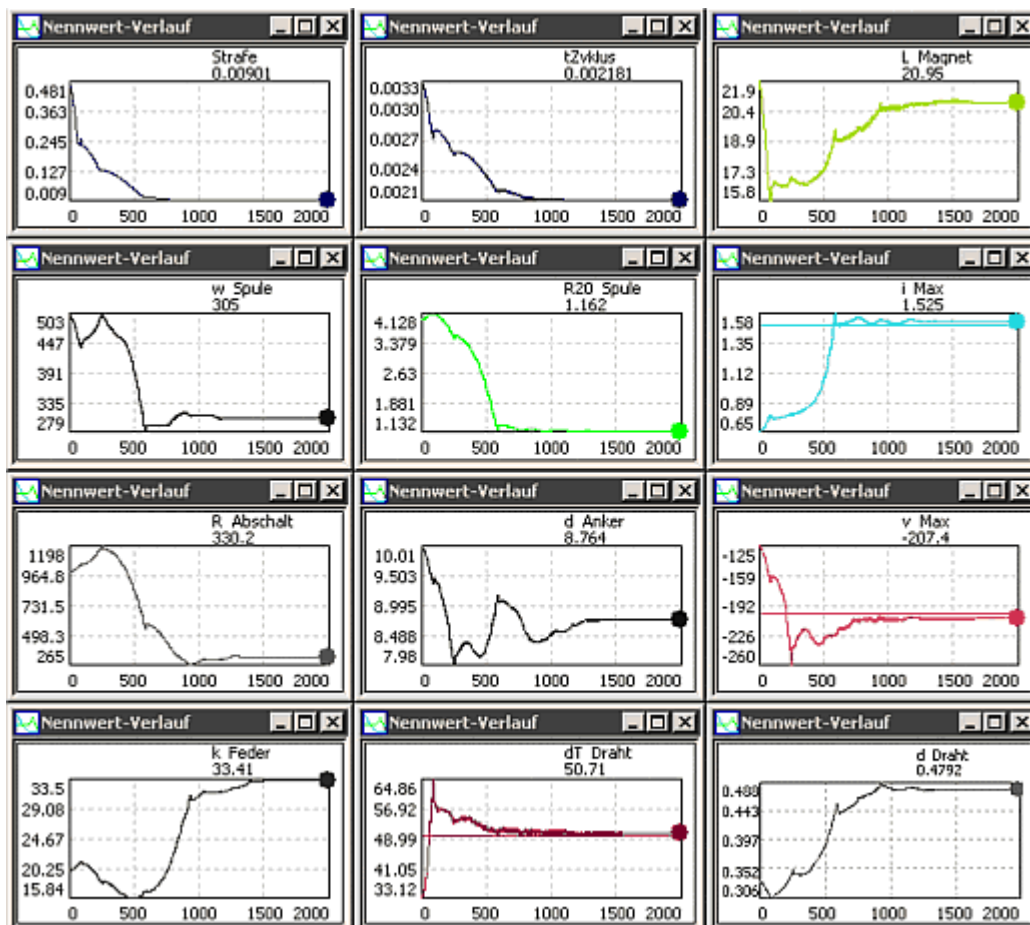


Bild 4: Verlauf der Nennwert-Optimierung

### 5.1. Probabilistische Simulation

Obige optimale Ideal-Lösung wird in der Praxis recht schnell versagen, weil sämtliche Kenngrößen eines realen Antriebs natürlich mit Streuungen behaftet sind. Um die gesamte Bandbreite des Verhaltens aller möglichen Realisierungen des modellierten Antriebs zu analysieren, kann man die probabilistische Simulation benutzen. Diese entspricht praktisch der Simulation einer Stichprobe. Sowohl der zulässige Maximalstrom, als auch die zulässige Induktionsspannung an der Spule werden in ungefähr 50% der Fälle überschritten:



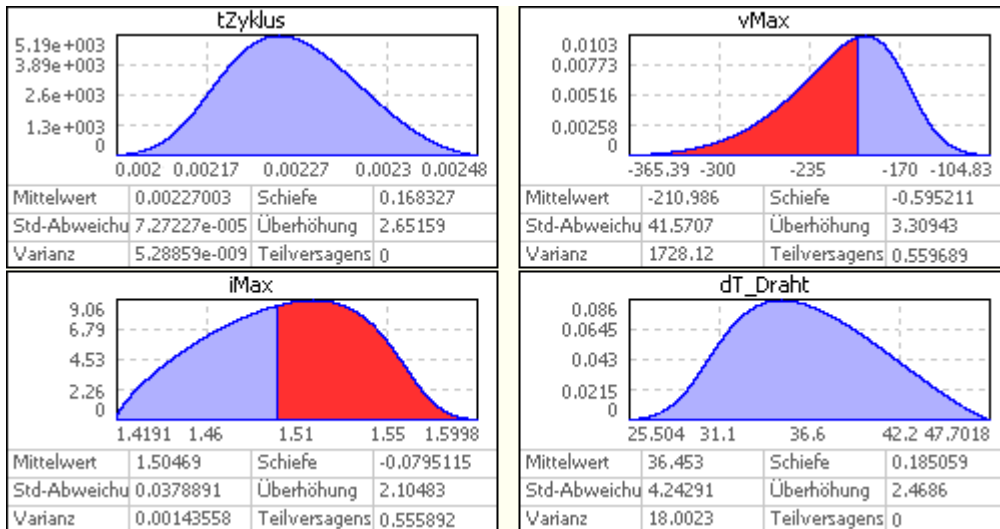


Bild 5: Verteilungsdichten der Bewertungsgrößen

Auch wenn sämtliche Parameter eines realen Antriebs mit Streuungen behaftet sind, muss man aus Aufwandgründen eine Reduktion auf die relevante Streuungen vornehmen, z.B.:

- Temperatur T der Spule (0°C bis 100°C) - *Gleich verteilt*
- Betriebsspannung u ( $\pm 10\%$ ) - *Gleich verteilt*
- Schutzwiderstand RS ( $\pm 5\%$ ) - *Normal verteilt*
- Federkonstante kF der Rückholfeder ( $\pm 30\%$ ) - *Normal verteilt*
- Papiersteifheit kP ( $\pm 50\%$ ) - *Normal verteilt*

In welchem Maße die Streuungen der Bewertungsgrößen durch die Streuungen der Modellparameter hervorgerufen werden, erkennt man anhand der globalen Sensitivitäten:

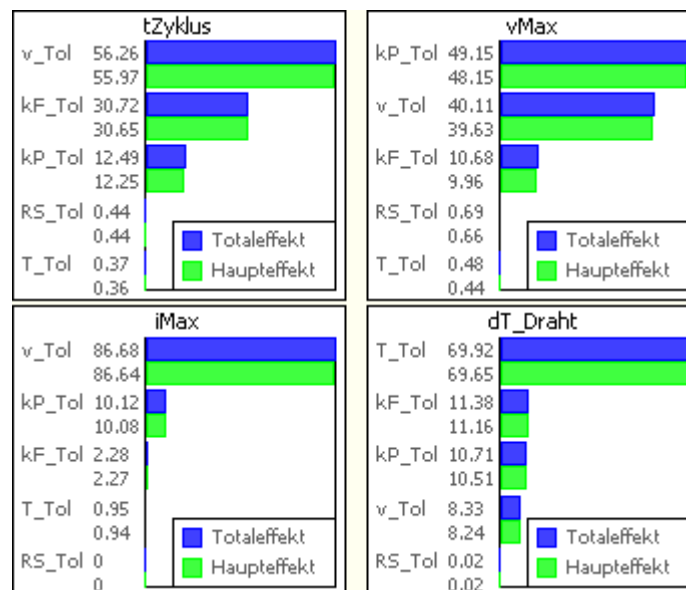


Bild 6: Sensitivität-Charts der globalen Sensitivitäten

Den Sensitivität-Charts kann man zwei wesentliche Informationen entnehmen:

- Welche Streuungen haben kaum Einfluss auf die betrachteten Bewertungsgrößen?
- Existieren merkliche Interaktionen zwischen den Streuungen?

Sind Haupt- und Totaleffekt gleich, gibt es keine Interaktionen zwischen den Streuungsgrößen. Bei 5 Streuungsgrößen reduziert sich damit der Berechnungsaufwand von  $2n^2+1=51$  auf  $2n+1=11$  auf fast ein Fünftel!

## 5.2. Zuverlässigkeitsbasierte Optimierung

Das grundlegende Ziel der zuverlässigkeitsbasierten Optimierung besteht in der Minimierung der Gesamtversagenswahrscheinlichkeit. Ausgehend vom idealisierten Nennwert-Optimum wird dabei die gesamte Verhaltensstreuung in den zulässigen Lösungsbereich verschoben:

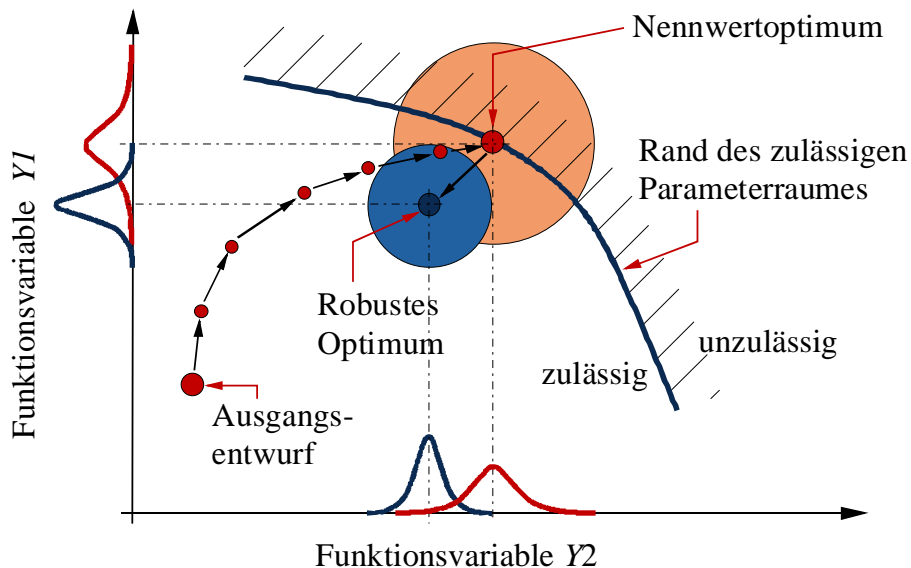


Bild 7: Zuverlässigkeitsbasierte Optimierung

Wird zusätzlich zur Ausschussminimierung auch noch eine Minimierung der Verhaltensstreuung angestrebt, so spricht man von einer Robustoptimierung.

Im Beispiel mussten nur drei Streuungen für die Optimierung berücksichtigt werden:

- Betriebsspannung  $u$  ( $\pm 10\%$ ) - *Gleich verteilt*
- Federkonstante  $k_F$  der Rückholfeder ( $\pm 30\%$ ) - *Normal verteilt*
- Papiersteifheit  $k_P$  ( $\pm 50\%$ ) - *Normal verteilt*

Die Ausschuss-Minimierung erfolgte durch Freigabe vier wesentlicher Entwurfsparameter des Nadel-Antriebes (Ankerdurchmesser, Windungszahl, Spulenwiderstand, Rückholfeder). Das auf Abtastung der Zielfunktion beruhende Gradientenverfahren nach Hooke-Jeeves

konvergierte nach ca. 40 Optimierungsschritten zuverlässig zum Optimum. Die Streuungen der Bewertungsgrößen liegen danach im zulässigen Bereich:

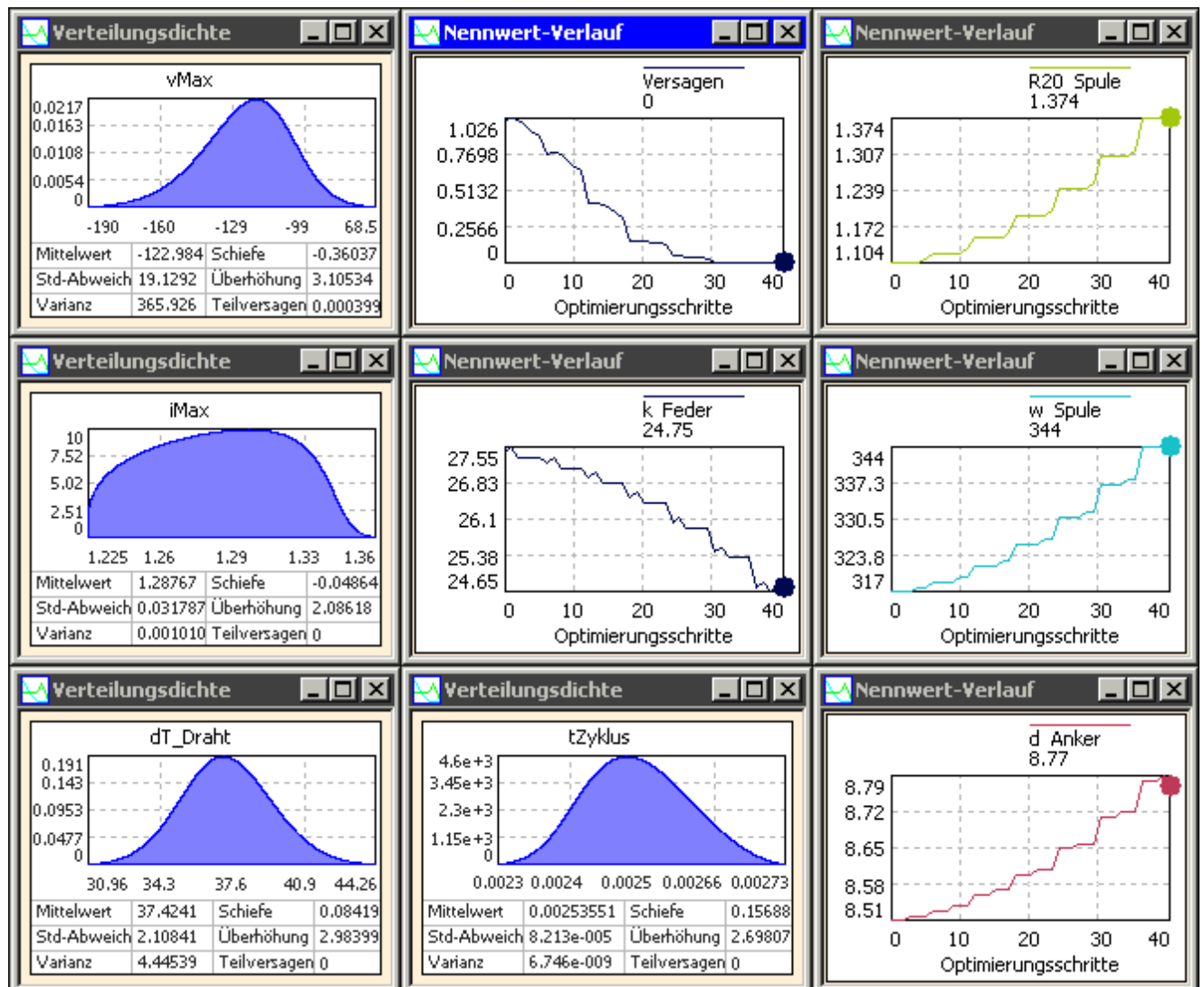


Bild 8: Verlauf der Ausschuss-Minimierung

Ausführlich ist dieser Gesamtprozess der zuverlässigkeitsbasierten Optimierung einschließlich der Robustoptimierung in der Übungsanleitung zur Lehrveranstaltung „Konstruktionstechnik“ beschrieben [2].

## 6. Zusammenfassung

Qualität und Zuverlässigkeit eines Produktes sind durch Streuungen, Unsicherheiten, Fertigungstoleranzen und Fehler gekennzeichnet. Um diese Probleme bereits in der Entwurfsphase in den Griff zu bekommen, verwendet man probabilistische Methoden wie Antwortflächen- und Moment-Verfahren. Auf der Basis des virtuellen Produktmodells werden

die statistischen Verteilungen der Produkteigenschaften aus den Verteilungen der Produktparameter berechnet. Damit lassen sich die Robustheit und Zuverlässigkeit des betrachteten Entwurfs bewerten. Eine Erklärung der Ursache-Wirkungs-Beziehungen und Reduzierung der Entwurfskomplexität kann man mit der globalen Sensitivitätsanalyse realisieren.

Die Anwendung am Magnetantrieb veranschaulicht Nutzen und Vorteile der probabilistischen Entwurfsmethode. Ausgehend von einer Nennwert-Optimierung wird eine Zuverlässigkeitsanalyse durchgeführt, die eine Versagenswahrscheinlichkeit von ca. 50% zeigt. Erst eine zuverlässigkeitsbasierte Optimierung zum Minimieren der Versagenswahrscheinlichkeit führt zu wirklich optimalen Produktparametern, die trotz der unvermeidbaren Streuungen die erforderliche Funktionssicherheit und Robustheit gewährleisten.

## 7. Literatur

- [1] OptiY Software und Dokumentation. OptiY e.K. 2008, [www.optiy.de](http://www.optiy.de)
- [2] A. Kamusella: Übungsunterlagen zur Lehrveranstaltung Konstruktionstechnik. Institut für Feinwerktechnik und Elektronik-Design. TU Dresden, 2008, [www.ifte.de/mitarbeiter/kamusella.html](http://www.ifte.de/mitarbeiter/kamusella.html)
- [3] T.Q. Pham, A. Kamusella: Probabilistische Optimierung am Beispiel eines Magnetantriebes. 19. Symposium Simulationstechnik, 12-14 September 2006 in Hannover
- [4] T.Q. Pham, A. Kamusella: Multidisziplinäre Zuverlässigkeits- und Robustheitsanalyse mechatronischer Systeme. Internationales Forum Mechatronik, 16-17 Oktober 2006 in Linz
- [5] T.Q. Pham, H. Neubert, A. Kamusella: Design for Reliability and Robustness through Probabilistic Methods in COMSOL Multiphysics with OptiY. 2. Europäische COMSOL Konferenz, 4-6 November 2008 in Hannover
- [6] T. Streilein, J Hillmann: Stochastische Simulation und Optimierung am Beispiel VW Phaeton. VDI Tagung „Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau“, Würzburg 2002.
- [7] R.H. Myers, D.C. Montgomery: Response Surface Methodology. John Willey & Son Chichester, New York 2002.
- [8] A. Saltelli, K. Chan, E.M. Scott: Sensitivity Analysis. John Willey & Son Chichester, New York 2000.
- [9] A. Haldar, S. Mahadevan: First-order/second-order reliability methods (FORM/SORM). Probabilistic Structural Mechanics Handbook, 1993.